Généralités

EXERCICE 1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{x^3(x+2)} \qquad f_2 : x \mapsto \ln(\sin x) \qquad f_3 : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2-6x+5}{-x^2+2x+8}} \qquad f_4 : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{-x^2+2x+8}}$$

EXERCICE 2. **[Vrai ou faux ?]** Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1) Si $f : D \to \mathbb{R}$ est paire et impaire, alors f s'annule sur D.
2) Il existe une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ paire et injective, avec $D \neq \varnothing$.
3) Si f est T-périodique, alors f est $2T$-périodique.
4) Toute fonction croissante est ou bien strictement croissante, ou bien constante.
5) La somme de deux fonctions monotones est une fonction monotone.
6) Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
7) Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ est minorée sur $\mathbb{R}_+^\star$.
8) Si une fonction est positive et négative, alors elle s'annule en tout point.

EXERCICE 3. Que dire d'une fonction croissante et périodique ?

EXERCICE 4. **[Calcul de fonctions réciproques]**

1) Soit $f : x \mapsto 2x+5$. Démontrer que f est une bijection de D_f sur un ensemble à préciser. Déterminer sa réciproque f^{-1}.
2) Même question pour $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+3}$.

EXERCICE 5 ☆ . Donner une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tous réels a, b avec $a < b$, la fonction f n'est pas monotone sur $[a, b]$.

Dérivabilité et études de fonctions

EXERCICE 6. Déterminer les ensembles de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto (x^4+1)^5$
2) $x \mapsto |x+6|$
3) $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$
4) $x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$
5) $x \mapsto \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
6) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

EXERCICE 7. **Études de fonctions** On veillera à réduire l'intervalle d'étude.

1) Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$.
2) Étudier la fonction $x \mapsto x\ln|x|$.
3) Étudier la fonction $x \mapsto x^x$.
4) Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$.

EXERCICE 8. Calculer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes, aux points indiqués.

1) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ en $+\infty$.
2) $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ en 0^+.
3) $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.
4) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0^+ ;
5) $x \mapsto x^{-3}\ln(1+e^x)$ en $+\infty$.
6) $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^3}\right) \times \ln x$ en 0^+.

EXERCICE 9. Démontrer les propositions suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin(x)| \leq |x|$.
2) $\forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \leq x$

EXERCICE 10. Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

EXERCICE 11 ☆ . Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) \leq f(x)$$

Montrer que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$. *Indication : étudier* $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$.

(Nouvelles) fonctions usuelles

EXERCICE 12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$.

EXERCICE 13. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x :

1. $2\exp(3x) - 5\exp(2x) + 2\exp(x) \leqslant 0$
2. $\ln(3-x) + \ln(2) - 2\ln(x+1) \geqslant 0$.

EXERCICE 14. Résoudre $\text{ch} x = 3$.

EXERCICE 15.

1) Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note argsh sa bijection réciproque.
2) Montrer que la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variations de la fonction argsh.
3) Obtenir, pour $x \in \mathbb{R}$, une expression de $\text{argsh}(x)$ à l'aide de la fonction logarithme. Calculer la dérivée de argsh à l'aide de cette nouvelle expression. Vérifier la cohérence avec les résultats de la question précédente.

EXERCICE 16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \text{ch}(kx)$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,\text{sh}(kx)$.

EXERCICE 17. Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Et pour $x \in]-\infty, 0[$?

EXERCICE 18. Simplifier les expressions suivantes :

1) $\cos(2\arccos x)$
2) $\sin(2\arccos x)$
3) $\cos^2(\arctan x)$
4) $\sin(\arctan x)$

EXERCICE 19. Démontrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$. (Deux manières possibles !)

EXERCICE 20. Calculer $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

EXERCICE 21. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\arccos x = \arcsin(2x)$.

EXERCICE 22. Etudier la fonction $x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

EXERCICE 23 ☆ .

1) Peut-on trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\text{ch}(x)) = e^x$?
2) Peut-on trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\text{sh}(x)) = e^x$?.

EXERCICES DONNÉS EN COLLE

1) Vrai ou faux : toute fonction périodique est bornée.

2) Soit f paire et g impaire définies sur $\mathbb{R}$. Etudier la parité de $f \circ g$, de $f \times g$, de $f + g$

3) Que dire d'une fonction impaire positive ?

4) Que dire d'une fonction paire croissante ?

5) Dessiner une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et surjective.

6) Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire

7) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$.

8) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\alpha x)}{x}$.

9) Soit $a \in \mathbb{R}$. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - ax + a^2}$.

10) Etudier $f(x) := \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

11) Dériver (sans justifier pour quelles valeurs cela est possible) $f(x) = \sqrt{\sin x}$.

12) Dériver (sans justifier pour quelles valeurs cela est possible) $f(x) = \tan x \cos^4 x$.

13) Dériver (sans justifier pour quelles valeurs cela est possible) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$.

14) Dériver (sans justifier pour quelles valeurs cela est possible) $f(x) = \ln\left(\tan\left(1 + \sqrt{\sin(x^2)}\right)\right)$.